Jurnal Sainsmat, September 2012, Halaman 181-190 Vol. I, No. 2
ISSN 2086-6755
http://ojs.unm.ac.id/index.php/sainsmat

Analisis Pemahaman Mahasiswa Terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik (Studi Kasus pada Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNM)

Analysis of Students' Understanding on the Concept of Limit Function in One Point (a Case Study on Students of Mathematics Department at FMIPA UNM)

Erni Ekafitria Bahar, Abdul Rahman*, Ilham Minggi

Jurusan Biologi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Makassar. Jl. Daeng Tata Raya, Makassar 90224

Received 31 Agusutus 2012 / Accepted 23 Oktober 2012

ABSTRAK

Konsep limit fungsi memegang peranan yang sangat penting karena merupakan konsep dasar untuk membangun beberapa konsep kalkulus lainnya, misalnya turunan dan integral. Beberapa mahasiswa belum memahami definisi formal limit fungsi di satu titik dan belum mampu mengaplikasikan definisi formal untuk menvalidasi kebenaran nilai limit. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik. Pemahaman yang dimaksud dalam penelitian ini adalah pemahaman instrumental (mampu menuliskan konsep limit fungsi di satu titik tetapi tidak mampu menjelaskan dengan tepat) dan pemahaman relasional (mampu menuliskan dan menjelaskan konsep limit fungsi di satu titik dengan tepat). Subjek penelitian adalah tiga orang mahasiswa Jurusan Matematika yaitu seorang berkemampuan tinggi (ST) dengan IPK lebih besar 3,50, berkemampuan sedang (SS) dengan IPK antara 3,10 sampai 3,50, dan berkemampuan rendah (SR) dengan IPK kurang dari 3,10. Untuk mengungkap data penelitian, dilakukan wawancara berbasis tugas kepada subjek penelitian. Hasil penelitian menunjukkan pemahaman subjek tinggi dan subjek sedang terhadap aspek-aspek yang diamati, pada umumnya termasuk pemahaman relasional, sedangkan pemahaman subjek rendah pada umumnya termasuk pemahaman instrumental.

Kata kunci : Pemahaman instrumental dan relasional, limit fungsi di satu titik

ABSTRACT

The concept of limit is a basic concept to build several calculus concepts such as derivative and integral. Several students do not understand the formal definition of limit function and can't applied of formal definition of limit function to prove the truth of limit value. The objective of the study is to describe the students' understanding on the concept

**Korenspondensi:*
email: rahmanmallala@gmail.com

of limit function in one point. The understanding, in the research, consists of instrumental understanding (able to write the concept of limit function in one point but could not explain it well) and relational understanding (able to write and explain the concept of limit function in one point it well). The subjects of the study were three students of Mathematics Department that the person has high ability (ST) with GPA more than 3.50; moderate ability (SS) with GPA between 3.10 and 3.50; and low ability (SR) with GPA less than 3.10. In order to reveal the data of the study, task based interview was implemented to the research subjects. The results of the study reveal that the understanding of high achiever (ST) and moderate achiever (SS) to the aspects observed, generally included relational understanding, while the low ability in general included instrumental understanding.

Key words: Instrumental and relational understanding, the limit of a function at a point.

PENDAHULUAN

Salah satu tujuan penting pembelajaran matematika pada tahun pertama di tingkat pendidikan tinggi adalah mahasiswa mempelajari matematika untuk memahami dan menganalisis konsep matematika dan prosedur penyelesaian masalah. Konsep merupakan salah satu objek kajian matematika yang mendasar dan penting. Soedjadi (2000) mengemukakan bahwa konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep ataukah bukan. Solso (Suradi, 2001) mengungkapkan bahwa konsep adalah bayangan mental, ide-ide atau proses-proses.

Konsep dalam matematika diungkapkan dengan menggunakan definisi. Pemahaman dari definisi memegang peran penting dalam penguasaan matematika secara tuntas. Dalam kamus umum bahasa Indonesia "pemahaman" berarti hal, hasil kerja dari memahami atau sesuatu hal yang kita pahami dan kita mengerti dengan benar. Pemahaman adalah kemampuan seseorang untuk mengerti atau memahami sesuatu. Dengan kata lain, memahami adalah mengetahui tentang sesuatu dan dapat melihatnya dalam berbagai segi. Winkel (2004), mengemukakan bahwa pemahaman mencakup kemampuan untuk menangkap makna dan arti dari bahan yang dipelajari.

Salah satu konsep dalam matematika yang memegang peran yang sangat penting adalah konsep limit fungsi karena merupakan dasar pembangun beberapa konsep kalkulus lainnya, misalnya konsep turunan dan integral. Pembelajaran konsep limit fungsi diawali dengan menyajikan konsep tersebut secara intuitif sebelum definisi formal limit fungsi diberikan. Terdapat kecenderungan diantara mahasiswa mengungkapkan makna notasi limit fungsi berdasarkan pengertian intuitif limit fungsi dibandingkan menggunakan definisi formal limit fungsi. Bilamana mahasiswa diminta menjelaskan pengertian limit fungsi berdasarkan definisi formal limit fungsi tersebut, banyak diantara mahasiswa tidak dapat menjelaskan definisi limit fungsi tersebut

Pemahaman terhadap definisi limit fungsi sangat penting karena hal ini menjadi landasan untuk memahami teorema-teorema limit selanjutnya. Definisi formal limit fungsi yang diajarkan dalam kegiatan perkuliahan kalkulus biasa dikenal dengan nama definisi ε (dibaca: epsilon) dan δ (dibaca: delta). Definisi formal yang dimaksud sebagaimana dituliskan dalam buku Kalkulus oleh Purcell adalah:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sehingga |f(x) – L| < ε asalkan bahwa 0 < |x – c| < δ, yakni 0 < |x – c| < $\delta \Rightarrow$ |f(x) – L| < ε

Atau

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Apostol (1966), mendefinisikan limit dalam istilah persekitaran. Apostol mendefinisikan limit sebagai berikut

The symbolism

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \ (or\ f(x) \to L\ as\ x \to c)$$

Means that for every neigborhood $N_1(L)$ there is some neigborhood $N_2(c)$ such that $f(x) \in N_1(L)$ whenever $x \in N_2(c)$ and $x \neq c$

Beberapa pertanyaan yang seringkali dimunculkan oleh mahasiswa terkait dengan definisi limit fungsi, antara lain "apa makna ε dan δ dalam fungsi yang selalu bernilai real?", "apa hubungan antara ε dan δ dalam kaitannya dengan fungsi bernilai real?", atau "mengapa ε dan δ bernilai positif?". Berdasarkan observasi yang dilakukan, ternyata terdapat perbedaan persepsi mahasiswa dalam mengaitkan ε dan δ. Beberapa mahasiswa mengaitkan nilai ε dan δ yang ditulis dalam kalimat matematika jika *0 < |x – c| <* δ maka *|f(x) – L| <* ε dengan cara menetapkan δ terlebih dahulu kemudian menetapkan ε. Namun ada juga mahasiswa yang berpendapat bahwa kita menetapkan ε terlebih dahulu kemudian menetapkan δ. Dalam proses membuktikan limit fungsi, beberapa mahasiswa mampu menuliskan rangkaian bukti dengan benar, namun dia tidak memahami mengapa rangkaian (kalimat) bukti yang ditulisnya membuktikan limit tersebut. Dengan kata lain mereka dapat menunjukkan secara tertulis bukti limit fungsi tertentu namun tidak dapat menjelaskan langkah-langkah pembuktian yang dilakukannya. Hal ini menunjukkan bahwa beberapa mahasiswa belum memahami dengan benar konsep limit fungsi.

Berdasarkan uraian tersebut maka penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki deskripsi pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik. Pengetahuan tentang deskripsi pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik dapat membantu dosen merefleksi pembelajaran konsep limit agar mahasiswa memiliki pemahaman yang sesuai dengan konsep limit fungsi di satu titik.

Beberapa konsep yang menjadi konsep pembangun limit yaitu konsep fungsi, konsep logika (logika kalimat berkuantor dan implikasi), dan konsep nilai mutlak sebagai jarak. Konsep fungsi dan grafik fungsi membantu untuk merepresentasikan konsep limit fungsi ke dalam bentuk grafik sehingga walaupun suatu fungsi tidak terdefinisi pada c tetapi masih dapat dilihat perlaku fungsi jika x bergerak menuju c. Konsep nilai mutlak membantu merepresentasikan bahwa pertidaksamaan $0 < |x - c|$ mengandung makna bahwa jarak x ke c tidak akan pernah sama dengan 0 atau ekuivalen dengan $x \neq c$. Konsep logika kalimat berkuantor membantu untuk merepresentasikan pernyataan $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ bahwa untuk setiap ε yang dipilih selalu diperoleh δ yang berpadanan yang mengakibatkan kalimat implikasi $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ bernilai benar. Dalam hal ini nilai δ bergantung pada ε yang dipilih. Perlu dipahami bahwa nilai δ pada definisi formal limit fungsi di satu titik tidak tunggal. Jika suatu nilai δ ditemukan memenuhi syarat-syarat dari definisi, maka sebarang nilai positif yang lebih kecil dari δ juga memenuhi syarat-syarat tersebut (Dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS, 2004).

Pemahaman terhadap konsep limit fungsi dalam hal ini meliputi pemahaman terhadap definisi formal limit fungsi dan pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi untuk membuktikan/ memvalidasi nilai limit. Berdasarkan konsep-konsep pembangun konsep limit fungsi di satu titik maka dalam penelitian ini pemahaman terhadap definisi formal limit fungsi meliputi; (a) pemahaman terhadap ε dan δ; (b) pemahaman terhadap harga mutlak sebagai jarak; (c) pemahaman terhadap logika kalimat berkuantor dan implikasi; (d) pemahaman terhadap fungsi dan grafik fungsi.

Beberapa kerangka teori pemahaman konsep matematika dikemukakan oleh beberapa ahli, salah satunya adalah kerangka teori pemahaman yang dikemukakan oleh Skemp. Skemp (1987) mengungkapkan "*To understand something means to assimilate it into an apropriate schema*". Dalam artikelnya yang terkenal, "*Relational Understanding and Instrumental Understanding*", (Skemp, 2005) dijelaskan pengkategorian pemahaman atas dua jenis pemahaman yaitu: (1) pemahaman instrumental dan (2) pemahaman relasional. Pemahaman instrumental didefinisikan sebagai "*rules without reasons*" atau dengan kata lain kemampuan seseorang menggunakan prosedur matematik untuk menyelesaikan suatu masalah tanpa mengetahui mengapa prosedur itu digunakan. Dalam hal ini seseorang hanya memahami urutan pengerhaan atau algorimanya. Pemahaman relasional didefinisikan sebagai "*knowing what to do and why*" atau dengan kata lain kemampuan menggunakan suatu aturan dengan penuh kesadaran mengapa ia menggunakan aturan tersebut. Menurut Skemp, pada tahapan tingkatan ini seseorang tidak hanya sekedar tahu dan hapal tentang sesuatu hal tetapi juga mengetahui bagaimana dan mengapa hal itu dapat terjadi.

Penelitian ini dibatasi pada aspek pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Hal ini karena pada umumnya banyak orang yang mampu menyebutkan sesuatu dengan benar tetapi tidak mampu menjelaskan mengapa hal tersebut benar. Pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik dikatakan instrumental apabila mahasiswa mampu menuliskan dan mengimplementasikan konsep limit fungsi di satu titik tetapi belum mampu menjelaskan dengan tepat alasannya. Dikatakan pemahaman relasional ketika mahasiswa mampu menuliskan dan mengimplementasikan konsep limit fungsi di satu titik dan mampu menjelaskan dengan tepat alasannya.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan fokus penelitian adalah menganalisis pemahaman mahasiswa terhadap konsep limit fungsi di satu titik yang meliputi pemahaman terhadap definisi formal limit fungsi dan pemahaman dalam mengimplementasikan konsep limit fungsi untuk menvalidasi kebenaran nilai limit. Pemahaman dalam penelitian ini merujuk pada teori pemahaman Skemp yaitu pemahaman instrumental dan pemahaman relasional.

Subjek penelitian adalah mahasiswa yang telah mempelajari konsep limit fungsi. Subjek yang dipilih sebanyak tiga orang yang didasarkan pada IPK untuk mata kuliah yang termasuk mata kuliah analisis yaitu mahasiswa yang mempunyai IPK lebih besar dari 3,50 dikategorikan berkemampuan tinggi (ST), IPK antara 3,10 sampai 3,50 dikategorikan berkemampuan sedang (SS), dan IPK di bawah 3,10 dikategorikan berkemampuan rendah (SR).

Instrumen dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri dan instrumen pendukung yang berupa pedoman wawancara berbasis tugas. Data diperoleh dengan melakukan penggabungan wawancara terstruktur dan wawancara tidak terstruktur. Teknik analisis data yang digunakan merujuk pada teknik analisis data kualitatif yang dikemukakan oleh Hules dan Huberman (Sugiyono, 2006) yaitu: (a) reduksi data yang dilakukan dengan membuat rangkuman mengenai inti, proses, dan pernyataan-pernyataan yang sesuai dengan tujuan penelitian; (b) penyajian data yaitu data disajikan atau dipaparkan berdasarkan indikator yang diamati; (c) pemeriksaan keabsahan data dengan melakukan triangulasi waktu; (d) penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. *Pemahaman Subjek Tinggi (ST) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik*

a. *Pemahaman terhadap ε dan δ*

Subjek tinggi memahami bahwa ε dan δ merupakan sebagai suatu bilangan yang sangat kecil yang menunjukkan jarak. Pemahaman ε dan δ sebagai jarak didasarkan pada makna notasi limit secara intuitif yaitu jika x mendekati c maka $f(x)$ mendekati L. Karena ε dan δ merupakan jarak maka nilainya lebih besar dari 0. Subjek tinggi menjelaskan kaitan antara ε dan δ adalah δ bergantung pada ε yang mengakibatkan kalimat implikasi $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ bernilai benar. Hal ini didasarkan karena dalam definisi formal limit fungsi dikatakan untuk setiap ε ada δ, yang berarti bahwa δ diperoleh bergantung dari ε yang diambil. Pada aspek ini pemahaman subjek tinggi termasuk kategori pemahaman relasional.

b. *Pemahaman terhadap Logika Kalimat Berkuantor dan Kalimat Implikasi*

Subjek tinggi memahami bahwa makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ berarti untuk setiap ε, selalu dapat ditentukan suatu δ dimana dalam hal ini δ bergantung pada ε. Subjek tinggi juga memahami bahwa makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sama dengan makna $\exists\delta > 0, \forall\varepsilon > 0$ padahal kedua kuantor tersebut merupakan hal yang berbeda. Hal ini yang mendasari subjek tinggi bahwa dalam definisi formal limit fungsi $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ dapat dituliskan $\exists\delta > 0, \forall\varepsilon > 0$. Subjek memahami bahwa suatu kalimat implikasi bernilai salah hanya apabila premisnya (anteseden) bernilai benar dan kesimpulannya (konsekuen) bernilai salah. Pada aspek ini pemahaman subjek tinggi terhadap logika kalimat kuantor termasuk kategori pemahaman instrumental dan pemahaman terhadap kalimat implikasi termasuk pemahaman relasional.

c. *Pemahaman terhadap Harga Mutlak sebagai jarak*

Subjek tinggi memahami bahwa harga mutlak sebagai jarak sehingga $0 < |x - c| < \delta$ dipahami sebagai jarak titik x ke c selalu besar 0 dan kurang dari δ. Jarak x ke c tidak akan pernah sama dengan 0. Makna $|f(x) - L| < \varepsilon$ adalah jarak $f(x)$ ke L kurang dari ε (epsilon) dan jarak $f(x)$ ke L bisa 0 karena ε (epsilon) merupakan bilangan positif yang kecil sehingga kemungkinan nilai dari $|f(x) - L| = 0$. Berbeda halnya dengan $|x - c|$ yang harus memenuhi dua kondisi. Pada aspek ini pemahaman subjek tinggi termasuk kategori pemahaman relasional.

d. *Pemahaman terhadap Fungsi dan Grafik Fungsi*

Subjek tinggi menginterpretasikan grafik limit fungsi dengan mengaitkan makna notasi limit secara intuitif dengan definisi formal limit fungsi. Subjek memahami bahwa yang didekati terlebih dahulu adalah nilai c kemudian nilai L. Tetapi sebelum mendekati nilai c terlebih dahulu ditetapkan nilai δ yang bergantung pada nilai ε. Jadi nilai-nilai x yang mendekati c tidak dipilih sebarang tetapi nilai x tersebut harus berada pada selang $(c - \delta, c + \delta)$. Fungsi $f(x)$ tidak mengharuskan terdefinisi pada titik c. Pada aspek ini pemahaman subjek tinggi termasuk kategori pemahaman relasional.

e. *Pemahaman dalam Mengimplementasikan Definisi Formal Limit Fungsi untuk Membuktikan Kebenaran Nilai Limit*

Subjek tinggi mampu menuliskan langkah-langkah dalam membuktikan kebenaran nilai suatu limit dengan menggunakan definisi formal limit fungsi. Subjek juga mampu menjelaskan langkah-langkah pembuktian yang dituliskan dimana langkah awal dalam membuktikan adalah $|f(x) - L| < \varepsilon$ karena suatu implikasi bernilai benar jika kesimpulannya benar. Selain itu hal yang harus ditunjukkan untuk membuktikan kebenaran suatu limit adalah menentukan nilai δ untuk setiap ε yang dipilih. Subjek memahami bahwa nilai δ tidak tunggal. Pada aspek ini pemahaman subjek tinggi termasuk kategori pemahaman relasional.

2. *Pemahaman Subjek Sedang (SS) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik*

a. *Pemahaman terhadap* ε dan δ

Subjek sedang memahami bahwa ε dan δ merupakan sebagai suatu nilai pendekatan yang merupakan bilangan real positif dimana semakin dekat jarak x ke c maka $f(x)$ semakin dekat ke L. Subjek sedang memahami ε dan δ dengan mengaitkan makna notasi limit secara intuitif. Jarak x ke c yang semakin dekat disimbolkan δ dan jarak *f(x)* ke L disimbolkan ε. Sehingga secara implisit subjek sedang memaknai ε dan δ sebagai jarak. Subjek sedang menjelaskan kaitan antara ε dan δ adalah δ bergantung pada ε yang menimbulkan pernyataan implikasi $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ bernilai benar. Subjek sedang menjelaskan kaitan ε dan δ dengan menafsirkan makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sebagai "untuk setiap ε ada δ". Kata "ada δ" menunjukkan bahwa tidak semua δ memenuhi, bergantung pada ε yang dipilih. Pada aspek ini pemahaman subjek sedang termasuk kategori pemahaman relasional.

b. *Pemahaman terhadap Logika Kalimat Berkuantor dan Kalimat Implikasi*

Subjek sedang memahami bahwa makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ berarti untuk setiap ε, selalu dapat ditentukan suatu δ dimana dalam hal ini δ bergantung pada ε. Subjek sedang memahami bahwa makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ berbeda dengan makna $\exists\delta > 0, \forall\varepsilon > 0$. Makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ berarti δ bergantung pada ε, sedangkan menurut subjek sedang makna $\exists\delta > 0, \forall\varepsilon > 0$ berarti ε yang bergantung pada δ. Hal ini bertentangan dengan pemahaman yang dimiliki oleh subjek sedang tentang kaitan ε dan δ sehingga dalam definisi formal limit fungsi $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tidak dapat dituliskan $\exists\delta > 0, \forall\varepsilon > 0$.

Subjek memahami bahwa suatu kalimat implikasi bernilai benar jika pernyataan kedunya (kesimpulan atau konsekuen) bernilai benar. Hal ini karena pernyataan implikasi $P \Rightarrow Q$ ekuivalen dengan $\sim P \vee Q$. Sehingga yang perlu diperhatikan adalah pernyataan keduanya. Dalam hal ini, yang harus dibuat benar adalah $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pada aspek ini pemahaman subjek sedang terhadap logika kalimat kuantor dan kalimat implikasi termasuk kategori termasuk pemahaman relasional.

c. *Pemahaman terhadap Harga Mutlak sebaga jarak*

Subjek sedang memahami bahwa harga mutlak sebagai jarak. Makna $|x - c|$ dan makna $|c - x|$ sama yaitu menunjukkan jarak x ke c. Hal ini dipertegas dengan menunjukkan bukti dari sifat nilai mutlak. Secara eksplisit subjek memahami bahwa dalam limit fungsi, mengharuskan untuk memilih nilai $x \neq c$ karena ketika dipilih $x = c$ maka pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ akan menghasilkan $0 < 0 < \delta$ dan hal tersebut kontradiksi dengan sifat dua bilangan bulat yang sama. Notasi $|f(x) - L| < \varepsilon$ dipahami subjek bahwa jarak nilai fungsinya ke nilai limitnya lebih kecil dari ε. Subjek sedang membedakan antara nilai fungsi dan nilai limit. Pada aspek ini pemahaman subjek sedang termasuk kategori pemahaman relasional.

d. *Pemahaman terhadap Fungsi dan Grafik Fungsi*

Terjadi konflik dalam pikiran subjek sedang dalam menginterpretasikan grafik limit fungsi. Hal ini disebabkan karena subjek merasa terdapat kontradiksi antara definisi limit fungsi secara grafik dan definisi limit fungsi secara $\varepsilon - \delta$. Secara grafik subjek memahami bahwa yang seharusnya didekati terlebih dahulu adalah nilai c kemudian nilai L. Tetapi ketika subjek mengaitkan dengan definisi secara $\varepsilon - \delta$, subjek menginterpretasikan bahwa terlebih dahulu mengambil nilai-nilai pada daerah ε. Subjek sedang belum mampu menghubungkan definisi limit fungsi secara grafik dengan definisi limit fungsi secara $\varepsilon - \delta$. Pada aspek ini pemahaman subjek sedang termasuk kategori pemahaman instrumental.

e. Pemahaman dalam Mengimplementasikan Definisi Formal Limit Fungsi untuk Membuktikan Kebenaran Nilai Limit

Subjek sedang memahami bahwa dalam membuktikan kebenaran suatu nilai limit maka yang harus ditunjukkan adalah bahwa setiap mengambil suatu ε, selalu ada nilai δ sebagai padanannya. Subjek sedang mampu menuliskan dengan tepat langkah-langkah pembuktian kebenaran nilai limit. Tetapi subjek belum mampu menjelaskan dengan tepat langkah-langkah pembuktiannya. Hal ini karena langkah yang dituliskan hanya berdasarkan pengalaman belajarnya. Pada aspek ini pemahaman subjek sedang termasuk kategori pemahaman instrumental.

3. Pemahaman Subjek Rendah (SR) terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik

a. Pemahaman terhadap ε dan δ

Subjek rendah memahami ε dan δ sebagai bilangan positif yang sangat kecil sehingga nilainya lebih besar dari 0. Subjek menjelaskan makna ε dan δ berdasarkan data yang secara eksplisit dituliskan dalam definisi formal limit fungsi. Hal inilah yang menyebabkan, subjek belum mampu menjelaskan alasan ε dan δ tidak boleh sama dengan 0. Subjek rendah memahami kaitan antara ε dan δ adalah δ bergantung pada ε, sehingga yang diambil sebarang adalah ε kemudian δ yang dapat menyebabkan kalimat implikasi $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ bernilai benar. Pada aspek ini, pemahaman subjek rendah terhadap makna ε dan δ termasuk pemahaman instrumental dan pemahaman terhadap kaitan keduanya termasuk pemahaman relasioal.

b. Pemahaman terhadap Logika Kalimat Berkuantor dan Kalimat Implikasi

Subjek rendah memaknai $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sebagai untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka selalu ada $\delta > 0$. Hal ini dijelaskan oleh subjek secara implisit ketika menjelaskan kaitan antara ε dan δ. Subjek rendah memahami bahwa makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\ddot{a} > 0$ secara umum sama dengan makna $\exists\delta > 0$, $\forall\varepsilon > 0$, tetapi dalam definisi formal limit fungsi mempunyai makna berbeda. Dalam pikiran subjek rendah terbangun dua konsep kalimat kuantor yaitu konsep kuantor secara umum dan konsep kuantor dalam definisi formal limit fungsi. Subjek belum mampu menjelaskan perbedaan makna $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ dan makna $\exists\delta > 0, \forall\varepsilon > 0$ dalam definisi formal limit fungsi. Subjek memahami bahwa suatu kalimat implikasi bernilai benar apabila pernyataan keduanya (konsekuennya) bernilai benar. Subjek mampu membuat pengaitan ekuivalensi pernyataan implikasi dimana $P \Rightarrow Q$ ekuivalen dengan $\sim P \vee Q$. Pada aspek ini pemahaman subjek rendah terhadap logika kalimat kuantor termasuk kategori pemahaman instrumental dan pemahaman terhadap kalimat implikasi termasuk pemahaman relasional.

c. *Pemahaman terhadap Harga Mutlak sebagai jarak*

Subjek rendah memahami harga mutlak sebagai jarak. Makna $|x - c|$ dipahami sebagai jarak x ke c. $0 < |x - c| < \delta$ dipahami sebagai titik-titik persekitaran di c pada daerah sumbu x dengan jarak δ. Subjek mengaitkan kalimat "jarak nilai x ke c" dengan kalimat "titik-titik persekitaran pada daerah sumbu x dengan c". Pengaitan itu menunjukkan subjek memberi makna yang sama pada kedua kalimat tersebut. Makna $|x - c|$ dan makna $|c - x|$ dianggap berbeda walaupun secara nilai sama. Subjek membedakan antara makna dari harga mutlak dan nilai dari harga mutlak. Makna $|x - c|$ dan makna $|c - x|$ pada dasarnya sama yaitu menunjukkan jarak antara x dan c. Sehingga ini pemahaman subjek rendah terhadap harga mutlak pemahaman instrumental.

d. *Pemahaman terhadap Fungsi dan Grafik Fungsi*

Subjek rendah menginterpretasikan grafik limit fungsi dengan mengaitkan makna notasi limit secara intuitif sehingga subjek memahami bahwa yang terlebih dahulu didekati adalah nilai c. Subjek memahami bahwa terdapat relasi antara titik persekitaran L dengan titik persekitaran c. Nilai x yang dipilih oleh subjek rendah berada pada daerah persekitaran c. Sebelum memilih nilai x yang mendekati c. Subjek terlebih dahulu menentukan radius yang disimbolkan δ. Pada aspek ini pemahaman subjek rendah termasuk kategori pemahaman relasional.

e. *Pemahaman dalam Mengimplementasikan Definisi Formal Limit Fungsi untuk Membuktikan Kebenaran Nilai Limit*

Subjek rendah memahami bahwa dalam membuktikan kebenaran suatu nilai limit maka yang harus ditunjukkan adalah bahwa setiap mengambil suatu ε, selalu ada nilai δ sebagai padanannya. Subjek mengaitkan konsep implikasi dalam membuktikan kebenaran nilai limit sehingga langkah awal dalam membuktikan adalah diawali dari $|f(x) - L| < \varepsilon$. Subjek memahami bahwa nilai δ tunggal sehingga untuk setiap ε hanya berpadanan dengan suatu δ. Hal ini menunjukkan bahwa subjek belum memahami dengan baik pemilihan δ dalam membuktikan kebenaran nilai limit. Pada aspek ini pemahaman subjek rendah termasuk kategori pemahaman instrumental.

KESIMPULAN

Merujuk pada tujuan dan hasil penelitian yang telah dikemukakan, maka dapat ditarik kesimpulan yaitu: (1) pemahaman subjek tinggi (ST) terhadap konsep limit fungsi di satu titik termasuk pemahaman relasional kecuali pemahaman terhadap logika kalimat berkuantor yang termasuk pemahaman instrumental; (2) pemahaman subjek sedang (SS) terhadap konsep limit fungsi di satu titik termasuk pemahaman relasional kecuali pemahaman terhadap fungsi dan grafik fungsi serta pemahaman dalam mengimplementasikan definisi formal limit fungsi di satu titik dalam memvalidasi nilai limit yang termasuk pemahaman instrumental; (3) pemahaman subjek rendah (SR) terhadap konsep limit fungsi di satu titik termasuk pemahaman instrumental kecuali pemahaman tentang kaitan antara ε dan δ, pemahaman terhadap logika kalimat implikasi, dan pemahaman terhadap fungsi dan grafik fungsi yang termasuk pemahaman relasional.

SARAN

1. Pengajar Kalkulus sebaiknya menjelaskan dengan baik konsep limit fungsi di satu titik kepada mahasiswa agar diperoleh pemahaman konsep limit fungsi yang benar bagi mahasiswa.
2. Pengajar Kalkulus sebaiknya menjelaskan dengan baik hubungan atau kaitan antara definisi limit fungsi secara grafik dengan definisi limit fungsi menggunakan $\varepsilon - \delta$ sehinggga mahasiswa tidak memahami bahwa kedua definisi tersebut saling kontradiksi.
3. Perlu dilakukan pembiasaan atau pengajaran yang mengarahkan mahasiswa untuk tidak cenderung menghafal definisi suatu konsep. Hal ini dapat dilakukan dengan melatih mahasiswa menguraikan komponen-komponen definisi dan menentukan konsep-konsep yang terkait.
4. Mengingat pentingnya konsep limit fungsi di satu titik, mahasiswa sebaiknya memiliki kesadaran untuk memperluas pengetahuan mengenai konsep tersebut. Hal ini dapat dilakukan dengan banyak membaca literatur yang berkaitan dengan konsep tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Abidin Z. 2011. http://www.masbied.com/2011/09/02 defenisi- pemahaman-menurut- para- ahli/. Diakes 14 November 2011.

Apostol, Tom. 1966. *Calculus Volume 1 Second Edition*. California.

Arikunto S. 2010. *Dasar-Dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: Bumi Aksara.

Badudu. 1996. *Kamus Umum Bahasa Indonesia*. Jakarta: Pustaka Sinar Harapan.

Dosen-dosen Jurusan Matematika. 2004. *Kalkulus I*. Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA ITS.

Purcell. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I Edisis Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Skemp R. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics*. Expanded American Edition. New Jersey: Lawrence Elbaum Associates. Publishers.

Skemp R. 2005. *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. http: //www. blog. republicofmath. com/ archives/654. Diakses, 18 November 2011.

Soedjadi R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia, Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional.

Sugiyono. 2006. *Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif Dan R & D*. Bandung: Alfabeta.

Suradi. 2001. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*. Makassar: Jurusan Matematika FMIPA UNM.

Winkel WS. 2004. *Psikologi Pengajaran*. Yogyakarta: Media Abadi